

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Проректор по учебной работе**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Интегрируемые системы гамильтоновой механики
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Современная механика и робототехника
	Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
	кафедра теоретической механики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: С.В. Соколов, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой

Программа обсуждена на заседании кафедры теоретической механики 09.04.2020

## Аннотация

Проблема точного интегрирования систем дифференциальных уравнений - одна из самых популярных тем научных исследований, начиная с классических работ, посвященных задачам небесной механики, заканчивая современными исследованиями бесконечных серий интегралов движений нелинейных уравнений математической физики. Основным орудием в изучении проблем этого круга является идея симметрии. Тем не менее после работ Пуанкаре стало ясно, что свойство интегрируемости связано с особенностями глобального поведения траекторий. В курсе предполагается рассмотреть вопросы грубых (топологических) препятствий к интегрируемости, а также влияние резонансов. Освоенные математические методы, изложенные в курсе, позволят проводить строгие доказательства не интегрируемости многих актуальных проблем динамики.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

познакомить слушателей с классическими и современными результатами проблемы интегрируемости гамильтоновых систем, которые возникают естественным образом в задачах аналитической, небесной механики, а также в задачах динамики твердых тел и идеальной жидкости.

#### Задачи дисциплины

изложить на современном языке основы гамильтоновой механики, рассмотреть в систематическом виде методы точного интегрирования уравнений Гамильтона, а также различные препятствия к интегрируемости уравнений Гамильтона.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Методы математического моделирования в геометрии, кинематике и динамике;  
различные методы аналитической геометрии, линейной алгебры, теории дифференциальных уравнений.

уметь:

Составлять уравнения динамики механических и вихревых систем;  
осваивать новые предметные области, связанные с математическим моделированием различных систем.

владеть:

Навыками освоения большого объема информации;  
культурой математического моделирования динамических процессов в сложных системах;  
навыками постановки типовых задач и задач повышенной трудности теоретического плана с использованием методов дифференциальных уравнений.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Уравнения Гамильтона и алгебры Ли	3	3		5
2	Интегралы и группы симметрий	3	3		4
3	Топология конфигурационных пространств	3	3		5
4	Метод Пуанкаре	4	4		5
5	Метод Зигеля	3	3		5
6	Метод малого параметра Пуанкаре	4	4		8
7	Метод Биркгофа	3	3		5
8	Топология фазовых многообразий	4	4		4
9	Отображение момента	3	3		4
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

###### 1. Уравнения Гамильтона и алгебры Ли

Уравнения Гамильтона. Уравнения Эйлера-Пуассона на алгебрах Ли. Примеры: колебания, движение твердого тела с голономными и неголономными связями, задача N тел, некоторые задачи математической физики.

###### 2. Интегралы и группы симметрий

Интегралы. Инвариантные соотношения. Группы симметрий. Полная интегрируемость. Примеры. Разделение переменных. Представление Гейзенберга. Алгебраическая интегрируемость. Теория возмущений. Нормальные формы.

### 3. Топология конфигурационных пространств

Топология конфигурационного пространства интегрируемой системы. Геометрические препятствия к интегрируемости. Топологические препятствия к существованию линейных интегралов. Симметрии. Случай систем с двумя степенями свободы.

### 4. Метод Пуанкаре

Метод Пуанкаре. Группы симметрий. Критерий интегрируемости для тригонометрического потенциала. Рождение изолированных периодических решений. Асимптотические поверхности и условия их расщепления. Бифуркации сепаратрис.

### 5. Метод Зигеля

Метод Пуанкаре. Группы симметрий. Критерий интегрируемости для тригонометрического потенциала. Рождение изолированных периодических решений. Асимптотические поверхности и условия их расщепления. Бифуркации сепаратрис.

### 6. Метод малого параметра Пуанкаре

Метод малого параметра Пуанкаре. Группы монодромии гамильтоновых систем с однозначными интегралами.

### 7. Метод Биркгофа

Метод Биркгофа. Возмущения гамильтоновых систем с некомпактными инвариантными поверхностями. Влияние гироскопических сил.

### 8. Топология фазовых многообразий

Основные классы топологий фазовых многообразий.

### 9. Отображение момента

Анализ бифуркаций.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, интерактивная доска).

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Математические методы классической механики [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / В. И. Арнольд .— 5-е изд., стереотип. — М. : Эдиториал УРСС, 2003 .— 416 с.
2. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. И. Арнольд .— М. : Наука, 1978 .— 304 с.
3. Теоретическая механика [Текст] : учеб. пособие для ун-ов / А. П. Маркеев .— М. : Наука, 1990 .— 415 с.
4. Основы теоретической механики [Текст] / В. Ф. Журавлев .— 2-изд., перераб. — М. : Физматлит, 2001 .— 320 с.

5. Теоретическая гидромеханика [Текст] : 2 ч. Ч. 1 : учеб. пособие для вузов / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе ; под ред. И. А. Кибеля .— 6-е изд., испр. и доп. — М : Физматгиз, 1963 .— 583 с.

6. Гидродинамика [Текст]/Г. Ламб , -М. ; Л., Гостехтеоретиздат, 1947

#### Дополнительная литература

1. Общая теория вихрей [Текст]/В. В. Козлов, -М. ; Ижевск, Ин-т компьютер. исследований, 2013

### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».

<http://benran.ru> – библиотека по естественным наукам Российской академии наук

[https://mipt.ru/education/chair/theoretical\\_mechanics/](https://mipt.ru/education/chair/theoretical_mechanics/) - сайт кафедры теоретической механики МФТИ

### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций, а также программные пакеты Wolfram Mathematica и Matlab.

### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Успешное освоение курса требует большой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе);
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях,
- подготовку к контрольным, самостоятельным работам и тестам.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в результате анализа итогов контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

**по направлению:** Прикладные математика и физика  
**профиль подготовки:** Современная механика и робототехника  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
кафедра теоретической механики  
**курс:** 1  
**квалификация:** магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

**Разработчик:** С.В. Соколов, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Интегрируемые системы гамильтоновой механики» обучающийся должен:

### знать:

Методы математического моделирования в геометрии, кинематике и динамике; различные методы аналитической геометрии, линейной алгебры, теории дифференциальных уравнений.

### уметь:

Составлять уравнения динамики механических и вихревых систем; осваивать новые предметные области, связанные с математическим моделированием различных систем.

### владеть:

Навыками освоения большого объема информации; культурой математического моделирования динамических процессов в сложных системах; навыками постановки типовых задач и задач повышенной трудности теоретического плана с использованием методов дифференциальных уравнений.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Показать, что скобка Ли-Пуассона алгебры группы движений твердого тела вырождена. Найти аннуляторы этой алгебры.

2. Показать, что если имеется  $n$  полей симметрии, то уравнения движения допускают столько же линейных интегралов.

Темы курсовых:

1. Получить и проанализировать полный набор первых интегралов одного из классических интегрируемых случаев классической механики
2. Получить и проанализировать полный набор первых интегралов одного из классических интегрируемых случаев задач вихревой динамики
3. Построить бифуркационную диаграмму особенностей отображения момента некоторой гамильтоновой системы

#### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Для линейно гамильтоновой системы найти рекуррентные соотношения для полиномиальных первых интегралов. Показать их инволютивность и независимость. Остаток расхождения решения.
2. Показать, что в окрестности любой неособой точки векторного поля система может быть представлена в гамильтоновой форме.
3. Показать, что для пары Лакса системы дифференциальных уравнений, собственные числа матрицы Лакса являются первыми интегралами этой системы.
4. Найти представление Гейзенберга задачи Эйлера о свободном вращении твердого тела.
5. Рассмотреть группу движений твердого тела в трехмерном евклидовом пространстве и соответствующую ей алгебру. Найти структурные константы этой алгебры.

Билет:

1. Для линейно гамильтоновой системы найти рекуррентные соотношения для полиномиальных первых интегралов. Показать их инволютивность и независимость. Остаток расхождения решения.
2. Найти представление Гейзенберга задачи Эйлера о свободном вращении твердого тела.

#### **Критерии оценивания**

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.



Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Подготовка к экзамену самостоятельная: перечислены задачи, решение которых каждый студент излагает полностью.

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой, конспектами лекций.

Экзамен может проводиться по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, или путем организации специального опроса, проводимого в устной форме.